SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO ĐỒNG NAI
Trường THPT BC Lê Hồng Phong

Giáo viên thực hiện
NGUYỄN TẤT THU

Chuyên đề hội giảng

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH CÔNG THỨC TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ

Năm học: 2008 – 2009

MỤC LỤC

MỤC LỤC **1**

LỜI MỞ ĐẦU **3**

I. SỬ DỤNG CSC – CSN ĐỂ XÂY DỰNG CÁCH TÌM CTTQ CỦA MỘT SỐ DẠNG DÃY SỐ CÓ CÔNG THỨC TRUY HỒI ĐẶC BIỆT. **4**

II. SỬ DỤNG PHÉP THẾ LƯỢNG GIÁC ĐỂ XÁC ĐỊNH CTTQ CỦA DÃY SỐ **24**

III. ỨNG DỤNG BÀI TOÁN TÌM CTTQ CỦA DÃY SỐ VÀO GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ - TỔ HỢP **30**

BÀI TẬP ÁP DỤNG **41**

KẾT LUẬN – KIẾN NGHỊ **45**

TÀI LIỆU THAM KHẢO **46**

LỜI MỞ ĐẦU

Trong chương trình toán học THPT các bài toán liên quan đến dãy số là một phần quan trọng của đại số và giải tích lớp 11 , học sinh thường gặp nhiều khó khăn khi giải các bài toán liên qua đến dãy số và đặc biệt là bài toán xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số . Hơn nữa ở một số lớp bài toán khi đã xác định được công thức tổng quát của dãy số thì nội dung của bài toán gần như được giải quyết. Do đó xác định công thức tổng quát của dãy số chiếm một vị trí nhất định trong các bài toán dãy số.

Chuyên đề "***Một số phương pháp xác định công thức tổng quát của dãy số*** " nhằm chia sẻ với các bạn đồng nghiệp một số kinh nghiệm giải bài toán xác định CTTQ của dãy số mà bản thân đúc rút được trong quá trình học tập và giảng dạy.

Nội dung của chuyên đề được chia làm ba mục :

I: ***Sử dụng CSC – CSN để xây dựng phương pháp tìm CTTQ của một số dạng dãy số có dạng công thức truy hồi đặc biệt.***

II: ***Sử dụng phương pháp thế lượng giác để xác định CTTQ của dãy số***

III: ***Ứng dụng của bài toán xác định CTTQ của dãy số vào giải một số bài toán về dãy số - tổ hợp .***

Một số kết quả trong chuyên đề này đã có ở một số sách tham khảo về dãy số, tuy nhiên trong chuyên đề các kết quả đó được xây dựng một cách tự nhiên hơn và được sắp xếp từ đơn giản đến phức tạp giúp các em học sinh nắm bắt kiến thức dễ dàng hơn và phát triển tư duy cho các em học sinh.

Trong quá trình viết chuyên đề, chúng tôi nhận được sự động viên, giúp đỡ nhiệt thành của BGH và quý thầy cô tổ Toán Trường THPT BC Lê Hồng Phong. Chúng tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc.

Vì năng lực và thời gian có nhiều hạn chế nên ở chuyên đề sẽ có những thiếu sót. Rất mong quý Thầy – Cô và các bạn đồng nghiệp thông cảm và góp ý để chuyên đề được tốt hơn.

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH CÔNG THỨC TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ

I. SỬ DỤNG CSC – CSN ĐỂ XÂY DỰNG CÁCH TÌM CTTQ CỦA MỘT SỐ DẠNG DÃY SỐ CÓ CÔNG THỨC TRUY HỒI ĐẶC BIỆT.

Trong mục này chúng tôi xây dựng phương pháp xác định CTTQ của một số dạng dãy số có công thức truy hồi dạng đặc biệt. Phương pháp này được xây dựng dựa trên các kết quả đã biết về CSN – CSC , kết hợp với phương pháp chọn thích hợp. Trước hết chúng ta nhắc lại một số kết quả đã biết về CSN – CSC .

1. Số hạng tổng quát của cấp số cộng và cấp số nhân

1.1: Số hạng tổng quát của cấp số cộng

Định nghĩa: Dãy số (u_n) có tính chất $\boxed{u_n = u_{n-1} + d}$ $\forall n \geq 2$, d là số thực không đổi gọi là cấp số cộng .

d: gọi là công sai của CSC; u_1: gọi số hạng đầu, u_n gọi là số hạng tổng quát của cấp số

Định lí 1: Cho CSC (u_n). Ta có : $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d}$ (1).

Định lí 2*:* Gọi S_n là tổng n số hạng đầu của CSC (u_n) có công sai d. Ta có:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]} \quad (2).$$

1. 2: Số hạng tổng quát của cấp số nhân

Định nghĩa*:* Dãy số (u_n) có tính chất $u_{n+1} = q.u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ gọi là cấp số nhân công bội q.

Định lí 3: Cho CSN (u_n) có công bội q. Ta có: $\boxed{u_n = u_1 q^{n-1}}$ (3).

Định lí 4*:* Gọi S_n là tổng n số hạng đầu của CSN (u_n) có công bội q . Ta có:

$$\boxed{S_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}} \quad (4).$$

2. Áp dụng CSC – CSN để xác định CTTQ của một số dạng dãy số đặc biệt

Ví dụ 1.1: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$u_1 = 1,\ u_n = u_{n-1} - 2 \qquad \forall n \ge 2.$$

Giải:

Ta thấy dãy (u_n) là một CSC có công sai $d = -2$. Áp dụng kết quả (1) ta có:

$$u_n = 1 - 2(n-1) = -2n + 3.$$

Ví dụ 1.2: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$u_1 = 3,\ u_n = 2u_{n-1} \qquad \forall n \ge 2.$$

Giải:

Ta thấy dãy (u_n) là một CSN có công bội $q = 2$. Ta có: $u_n = 3.2^{n-1}$.

Ví dụ 1.3: Xác định số hạng tổng quát của dãy (u_n) được xác định bởi:

$$u_1 = -2,\quad u_n = 3u_{n-1} - 1 \qquad \forall n \ge 2.$$

Giải:

Trong bài toán này chúng ta gặp khó khăn vì dãy (u_n) không phải là CSC hay CSN! Ta thấy dãy (u_n) không phải là CSN vì xuất hiện hằng số -1 ở VT. Ta tìm cách làm mất -1 đi và chuyển dãy số về CSN.

Ta có: $-1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$ nên ta viết công thức truy hồi của dãy như sau:

$u_n - \frac{1}{2} = 3u_{n-1} - \frac{3}{2} = 3(u_{n-1} - \frac{1}{2})$ (1).

Đặt $v_n = u_n - \frac{1}{2} \Rightarrow v_1 = -\frac{5}{2}$ và $v_n = 3v_{n-1} \quad \forall n \ge 2$. Dãy (v_n) là CSN công bội $q = 3$

$\Rightarrow v_n = v_1.q^{n-1} = -\frac{5}{2}.3^{n-1}$. Vậy $u_n = v_n + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}.3^n + \frac{1}{2} \quad \forall n = 1,2,\dots,\dots$

Nhận xét: Mẫu chốt ở cách làm trên là ta phân tích $-1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$ để chuyển công thức truy hồi của dãy về (1), từ đó ta đặt dãy phụ để chuyển về dãy (v_n) là một CSN. Tuy nhiên việc làm trên có vẻ không tự nhiên lắm! Làm thế nào ta biết phân tích $-1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$? Ta có thể làm như sau:

Ta phân tích $-1 = k - 3k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$.

Với cách làm này ta xác định được CTTQ của dãy $(u_n) : \begin{cases} u_1 = x_0 \\ u_n = au_{n-1} + b \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$.

Thật vậy:

* Nếu $a = 1$ thì dãy (u_n) là CSC có công sai $d = b$ nên $u_n = u_1 + (n-1)b$.

* Nếu $a \neq 1$, ta viết $b = \frac{ab}{a-1} - \frac{b}{a-1}$. Khi đó công thức truy hồi của dãy được viết như sau: $u_n + \frac{b}{a-1} = a(u_{n-1} + \frac{b}{a-1})$, từ đây ta có được: $u_n + \frac{b}{a-1} = (u_1 + \frac{b}{a-1})a^{n-1}$

Hay $u_n = u_1 a^{n-1} + b\frac{a^{n-1} - 1}{a-1}$.

Vậy ta có kết quả sau:

Dạng 1: Dãy số $(u_n) : u_1 = x_0,\ u_n = au_{n-1} + b\ \forall n \geq 2$ ($a, b \neq 0$ là các hằng số) có CTTQ là:

$$u_n = \begin{cases} u_1 + (n-1)b & \text{khi} \quad a = 1 \\ u_1.a^{n-1} + b\frac{a^{n-1} - 1}{a-1} & \text{khi a} \neq 1 \end{cases}.$$

Ví dụ 1.4: Xác định CTTQ của dãy (u_n)được xác định : $u_1 = 2;\ u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1$.

Giải: Để tìm CTTQ của dãy số ta tìm cách làm mất $3n - 1$ để chuyển về dãy số là một CSN. Muốn làm vậy ta viết :

$$3n - 1 = -3n - 5 + 2\left[3(n-1) + 5\right] \quad (2).$$

Khi đó công thức truy hồi của dãy được viết như sau:

$$u_n + 3n + 5 = 2\left[u_n + 3(n-1) + 5\right].$$

Đặt $v_n = u_n + 3n + 5$, ta có: $v_1 = 10$ và $v_n = 2v_{n-1}\ \forall n \geq 2 \Rightarrow v_n = v_1.2^{n-1} = 10.2^{n-1}$

Vậy CTTQ của dãy $(u_n) : u_n = v_n - 3n - 5 = 5.2^n - 3n - 5\quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$.

Chú ý : 1) Để phân tích được đẳng thức (2), ta làm như sau:

$3n-1=an+b-2\left[a(n-1)+b\right]$. Cho $n=1;n=2$ ta có: $\begin{cases}a-b=2\\ -b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=-5\end{cases}$.

2) Trong trường hợp tổng quát dãy $(u_n):\begin{cases}u_1\\ u_n=au_{n-1}+f(n)\quad\forall n\ge 2\end{cases}$, trong đó $f(n)$ là một đa thức bậc k theo n, ta xác định CTTQ như sau:

Phân tích $f(n)=g(n)-ag(n-1)$ (3) với $g(n)$ cũng là một đa thức theo n. Khi đó ta có: $u_n-g(n)=a\left[u_{n-1}-g(n-1)\right]=...=a^{n-1}\left[u_1-g(1)\right]$

Vậy ta có: $u_n=\left[u_1-g(1)\right]a^{n-1}+g(n)$.

Vấn đề còn lại là ta xác định $g(n)$ như thế nào ?

Ta thấy :

*Nếu $a=1$ thì $g(n)-ag(n-1)$ là một đa thức có bậc nhỏ hơn bậc của $g(n)$ một bậc và không phụ thuộc vào hệ số tự do của $g(n)$, mà $f(n)$ là đa thức bậc k nên để có (3) ta chọn $g(n)$ là đa thức bậc $k+1$, có hệ số tự do bằng không và khi đó để xác định $g(n)$ thì trong đẳng thức (3) ta cho $k+1$ giá trị của n bất kì ta được hệ $k+1$ phương trình, giải hệ này ta tìm được các hệ số của $g(n)$.

* Nếu $a\ne 1$ thì $g(n)-ag(n-1)$ là một đa thức cùng bậc với $g(n)$ nên ta chọn $g(n)$ là đa thức bậc k và trong đẳng thức (3) ta cho $k+1$ giá trị của n thì ta sẽ xác định được $g(n)$.

Vậy ta có kết quả sau:

Dạng 2: Để xác định CTTQ của dãy (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_1=x_0\\ u_n=a.u_{n-1}+f(n)\end{cases}$, trong đó $f(n)$ là một đa thức bậc k theo n; a là hằng số. Ta làm như sau:

Ta phân tích: $f(n)=g(n)-a.g(n-1)$ với $g(n)$ là một đa thức theo n. Khi đó, ta đặt $v_n=u_n-g(n)$ ta có được: $u_n=\left[u_1-g(1)\right]a^{n-1}+g(n)$.

Lưu ý nếu $a=1$, ta chọn $g(n)$ là đa thức bậc $k+1$ có hệ số tự do bằng không, còn nếu $a\ne 1$ ta chọn $g(n)$ là đa thức bậc k.

Ví dụ 1.5: Cho dãy số $(u_n):\begin{cases}u_1=2\\ u_n=u_{n-1}+2n+1\end{cases}$. Tìm CTTQ của dãy (u_n).

Giải: Ta phân tích $2n+1=g(n)-g(n-1)=a\left[n^2-(n-1)^2\right]+b\left[n-(n-1)\right]$

(trong đó $g(n) = an^2 + bn$).

Cho $n = 0, n = 1$ ta có hệ: $\begin{cases} -a + b = 1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow g(n) = n^2 + 2n$.

$\Rightarrow u_n = n^2 + 2n - 1$.

Ví dụ 1.6: Cho dãy số $(u_n) : \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1} + 2^n \quad ; \quad n = 2, 3, \ldots \end{cases}$.Tìm CTTQ của dãy (u_n).

Giải: Ta vẫn bắt chước cách làm trong các ví dụ trên, ta phân tích:

$2^n = a.2^n - 3a.2^{n-1}$. Cho $n = 1$, ta có: $a = -2 \Rightarrow 2^n = -2.2^n + 3.2.2^{n-1}$

Nên ta có: $u_n + 2.2^n = 3(u_{n-1} + 2.2^{n-1}) = \ldots = 3^{n-1}(u_1 + 4)$

Vậy $u_n = 5.3^{n-1} - 2^{n+1}$.

Chú ý : Trong trường hợp tổng quát dãy $(u_n) : u_n = a.u_{n-1} + b.\alpha^n$, ta phân tích

$$\alpha^n = k.\alpha^n - ak.\alpha^{n-1} \text{ với } (a \neq \alpha).$$

Khi đó: $u_n - kb.\alpha^n = a\left(u_{n-1} - kb.\alpha^{n-1}\right) = \ldots = a^{n-1}\left(u_1 - bk\right)$

Suy ra $u_n = a^{n-1}(u_1 - bk) + bk.\alpha^n$.

Trường hợp $\alpha = a$, ta phân tích $\alpha^n = n.\alpha^n - \alpha(n-1).\alpha^{n-1}$

$\Rightarrow u_n - bn.\alpha^n = \alpha\left(u_{n-1} - b(n-1).\alpha^{n-1}\right) = \ldots = \alpha^{n-1}(u_1 - b\alpha)$

$\Rightarrow u_n = b(n-1)\alpha^n + u_1\alpha^{n-1}$. Vậy ta có kết quả sau.

Dạng 3: Để xác định CTTQ của dãy $(u_n) : \begin{cases} u_1 \\ u_n = a.u_{n-1} + b.\alpha^n \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$, ta làm như sau:

- Nếu $a = \alpha \Rightarrow u_n = b(n-1)\alpha^n + u_1\alpha^{n-1}$.
- Nếu $a \neq \alpha$, ta phân tích $\alpha^n = k.\alpha^n - ak.\alpha^{n-1}$. Khi đó: $u_n = a^{n-1}(u_1 - bk) + bk.\alpha^n$

Ta tìm được: $k = \dfrac{\alpha}{\alpha - a}$.

Ví dụ 1.7: Tìm CTTQ của dãy $(u_n):\begin{cases} u_1=-2 \\ u_n=5u_{n-1}+2.3^n-6.7^n+12\ ;\ n=2,3,... \end{cases}$.

Giải: Ta có: $\begin{cases} 3^n=k.3^n-5k.3^{n-1} \\ 7^n=l.7^n-5l.7^{n-1} \end{cases}$ cho $n=1$, ta được: $\begin{cases} k=-\dfrac{3}{2} \\ l=\dfrac{7}{2} \end{cases}$

Hơn nữa $12=-3+5.3$ nên công thức truy hồi của dãy được viết lại như sau:

$u_n+3.3^n+21.7^n+3=5\left(u_{n-1}+3.3^{n-1}+21.7^{n-1}+3\right)=...=5^{n-1}(u_1+9+147+3)$

Vậy $u_n=157.5^{n-1}-3^{n+1}-3.7^{n+1}-3$.

Ví dụ 1.8: Tìm CTTQ của dãy $(u_n):\begin{cases} u_1=1 \\ u_n=2u_{n-1}+3^n-n;\quad \forall n\ge 2 \end{cases}$.

Giải: Ta phân tích: $\begin{cases} 3^n=3.3^n-2.3.3^{n-1} \\ n=-n-2+2\left[(n-1)+2\right] \end{cases}$ nên ta viết công thức truy hồi của dãy như sau: $u_n-3.3^n-n-2=2\left[u_{n-1}-3.3^{n-1}-(n-1)-2\right]=...=2^{n-1}(u_1-12)$

Vậy $u_n=-11.2^{n-1}+3^{n+1}+n+2$.

Dạng 4: Để xác định CTTQ của dãy $(u_n):\begin{cases} u_1=p \\ u_n=a.u_{n-1}+b.\alpha^n+f(n);\quad \forall n\ge 2 \end{cases}$, trong đó $f(n)$ là đa thức theo n bậc k, ta phân tích α^n và $f(n)$ như cách phân tích ở dạng 2 và dạng 3.

Ví dụ 1.9: Xác định CTTQ của dãy $(u_n): u_0=-1, u_1=3,\ u_n=5u_{n-1}-6u_{n-2}\ \forall n\ge 2$.

Giải: Để xác định CTTQ của dãy số trên, ta thay thế dãy (u_n) bằng một dãy số khác là một CSN. Ta viết lại công thức truy hồi của dãy như sau:

$u_n - x_1.u_{n-1} = x_2(u_{n-1} - x_1u_{n-2})$, do đó ta phải chọn x_1, x_2 : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1x_2 = 6 \end{cases}$ hay x_1, x_2 là nghiệm phương trình : $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2; x = 3$. Ta chọn $x_1 = 2; x_2 = 3$. Khi đó:

$u_n - 2u_{n-1} = 3(u_{n-1} - 2u_{n-2}) = ... = 3^{n-1}(u_1 - 2u_0) = 5.3^{n-1}$

$\Rightarrow u_n = 2u_{n-1} + 5.3^{n-1}$. Sử dụng kết quả dạng 3, ta tìm được: $u_n = 5.3^n - 6.2^n$.

Chú ý : Tương tự với cách làm trên ta xác định CTTQ của dãy (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_0;\ u_1 \\ u_n - a.u_{n-1} + b.u_{n-2} = 0 \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$, trong đó a, b là các số thực cho trước và $a^2 - 4b \geq 0$ như sau:

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình : $x^2 - ax + b = 0 \quad (4)$ (phương trình này được gọi là phương trình đặc trưng của dãy).

Khi đó: $u_n - x_1.u_{n-1} = x_2(u_{n-1} - x_1.u_{n-2}) = ... = x_2^{n-1}(u_1 - x_1.u_0)$.

Sử dụng kết quả của dạng 3, ta có các trường hợp sau:

- Nếu $x_1 \neq x_2$ thì $u_n = \dfrac{x_2.u_0 - u_1}{x_2 - x_1}x_1^n + \dfrac{u_1 - x.u_0}{y - x}x_2^n$. Hay $u_n = k.x_1^n + l.x_2^n$, trong đó k, l là nghiệm của hệ: $\begin{cases} k + l = u_0 \\ x_1.k + x_2.l = u_1 \end{cases}$.
- Nếu $x_1 = x_2 = \alpha$ thì $u_n = \alpha^{n-1}\left[\dfrac{u_0a}{2} + (u_1 - \dfrac{au_0}{2})n\right]$, hay $u_n = (kn + l)\alpha^{n-1}$, trong đó k, l là nghiệm của hệ: $\begin{cases} l = \alpha.u_0 \\ k + l = u_1 \end{cases}$.

Vậy ta có kết quả sau:

Dạng 5: Để xác định CTTQ của dãy (u_n): $\begin{cases} u_0;\ u_1 \\ u_n - a.u_{n-1} + b.u_{n-2} = 0 \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$, trong đó a, b, c là các số thực khác không; $a^2 - 4b \geq 0$ ta làm như sau:

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đặc trưng: $x^2 - ax + b = 0$.

- Nếu $x_1 \neq x_2$ thì $u_n = k.x_1^n + l.x_2^n$, trong đó k, l là nghiệm của hệ : $\begin{cases} k + l = u_0 \\ x_1.k + x_2.l = u_1 \end{cases}$.
- Nếu $x_1 = x_2 = \alpha$ thì $u_n = (kn + l)\alpha^{n-1}$, trong đó k, l là nghiệm của hệ: $\begin{cases} l = \alpha.u_0 \\ k + l = u_1 \end{cases}$.

Ví dụ 1.10: Cho dãy số $\left(u_n\right)$ được xác định bởi : $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + u_{n-1} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$.

Hãy xác định CTTQ của dãy (u_n).

Giải:

Phương trình $x^2 - 4x - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 2 + \sqrt{5};\ x_2 = 2 - \sqrt{5}$.

$\Rightarrow u_n = k.x_1^n + l.x_2^n$. Vì $u_0 = 1; u_1 = 2$ nên ta có hệ: $\begin{cases} k + l = 1 \\ (2 + \sqrt{5})k + (2 - \sqrt{5})l = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow k = l = \dfrac{1}{2}$. Vậy $u_n = \dfrac{1}{2}\left[(2 + \sqrt{5})^n + (2 - \sqrt{5})^n\right]$.

Ví dụ 1.11: Xác định CTTQ của dãy: $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 3 \\ u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0 \ \forall n = 2, 3, \ldots \end{cases}$.

Giải:

Phương trình đặc trưng $x^2 - 4x + 4 = 0$ có nghiệm kép $x = 2$ nên $u_n = (kn + l)2^{n-1}$

Vì $u_0 = 1; u_1 = 3$ nên ta có hệ: $\begin{cases} l = 2 \\ k + l = 3 \end{cases} \Leftrightarrow k = 1; l = 2$.

Vậy $u_n = (n + 2)2^{n-1}$.

Ví dụ 1.12: Cho dãy $(u_n) : \begin{cases} u_0 = -1; u_1 = 3 \\ u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = 2n^2 + 2n + 1; \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$. Xác định CTTQ của dãy (u_n).

Giải:

Với cách làm tương tự như ***Ví dụ 1.4***, ta phân tích: $2n^2 + 2n + 1 =$

$= (kn^2 + ln + t) - 5\left[k(n-1)^2 + l(n-1) + t\right] + 6\left[k(n-2)^2 + l(n-2) + t\right]$ (5)

Ở (5) cho $n = 0; n = 1; n = 2$ ta có hệ: $\begin{cases} 19k - 7l + 2t = 1 \\ 7k - 5l + 2t = 5 \\ -k - 3l + 2t = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ l = 8 \\ t = 19 \end{cases}$.

Đặt $v_n = u_n - n^2 - 8n - 19 \Rightarrow v_0 = -20; v_1 = -25$ và $v_n - 5v_{n-1} + 6v_{n-2} = 0$

$\Rightarrow v_n = \alpha.3^n + \beta.2^n$. Ta có hệ: $\begin{cases} \alpha + \beta = -20 \\ 3\alpha + 2\beta = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 15 \\ \beta = -35 \end{cases}$

$\Rightarrow v_n = 15.3^n - 35.2^n \Rightarrow u_n = 15.3^n - 35.2^n + n^2 + 8n + 19$.

Chú ý : Để xác định CTTQ của dãy số: $(u_n) : \begin{cases} u_0; u_1 \\ u_{n+1} + a.u_n + b.u_{n-1} = f(n) \ ; \ \forall n \ge 2 \end{cases}$,

(trong đó $f(n)$ là đa thức bậc k theo n và $a^2 - 4b \ge 0$) ta làm như sau:

- Ta phân tích $f(n) = g(n) + ag(n-1) + bg(n-2)$ (6) rồi ta đặt $v_n = u_n - g(n)$

Ta có được dãy số $(v_n) : \begin{cases} v_0 = u_0 - g(0); v_1 = u_1 - g(1) \\ v_n + av_{n-1} + bv_{n-2} = 0 \ \forall n \ge 2 \end{cases}$. Đây là dãy số mà ta đã xét trong dạng 5. Do đó ta sẽ xác định được CTTQ của $v_n \Rightarrow u_n$.

- Vấn đề còn lại là ta xác định $g(n)$ như thế nào để có (6) ?

Vì $f(n)$ là đa thức bậc k nên ta phải chọn $g(n)$ sao cho $g(n) + ag(n-1) + bg(n-2)$ là một đa thức bậc k theo n. Khi đó ta chỉ cần thay $k+1$ giá trị bất kì của n vào (6) ta sẽ xác định được $g(n)$.

Giả sử $g(n) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ ($a_m \ne 0$) là đa thức bậc m. Khi đó hệ số của x^m và x^{m-1} trong VP là: $a_m.(1 + a + b)$ và $\left[-(a+2b)m.a_m + (1+a+b)a_{m-1}\right]$.

Do đó :

$i)$ Nếu PT: $x^2 + ax + b = 0$ (1) có nghiệm hai nghiệm phân biệt khác 1 thì $1 + a + b \ne 0$ nên VP(6) là một đa thức bậc m.

$ii)$ Nếu PT (1) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = 1 \Rightarrow 1 + a + b = 0$ và $-(a+2b)m.a_m + (1+a+b)a_{m-1} = -(a+2b).m.a_m \ne 0$ nên VP(6) là một đa thức bậc $m-1$.

$iii)$ Nếu PT (1) có nghiệm kép $x = 1 \Rightarrow a = -2; b = 1$ nên VP(6) là một đa thức bậc $m-2$.

Vậy để chọn $g(n)$ ta cần chú ý như sau:

❖ Nếu (1) có hai nghiệm phân biệt, thì $g(n)$ là một đa thức cùng bậc với $f(n)$

❖ Nếu (1) có hai nghiệm phân biệt, trong đó một nghiệm bằng 1 thì ta chọn $g(n) = n.h(n)$ trong đó $h(n)$ là đa thức cùng bậc với $f(n)$.

❖ Nếu (1) có nghiệm kép $x = 1$ thì ta chọn $g(n) = n^2.h(n)$ trong đó $h(n)$ là đa thức cùng bậc với $f(n)$.

Dạng 6: Để tìm CTTQ của dãy $(u_n): \begin{cases} u_0; u_1 \\ u_n + a.u_{n-1} + b.u_{n-2} = f(n) \ ; \ \forall n \geq 2 \end{cases}$,

(trong đó $f(n)$ là đa thức theo n bậc k và $b^2 - 4ac \geq 0$) ta làm như sau:

Xét $g(n)$ là một đa thức bậc k: $g(n) = a_k n^k + ... + a_1 k + a_0$.

- Nếu phương trình : $x^2 + ax + b = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt, ta phân tích $f(n) = g(n) + ag(n-1) + bg(n-2)$ rồi đặt $v_n = u_n - g(n)$.
- Nếu (1) có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm $x = 1$, ta phân tích $f(n) = n.g(n) + a(n-1)g(n-1) + b(n-2)g(n-2)$ rồi đặt $v_n = u_n - n.g(n)$.
- Nếu (1) có nghiệm kép $x = 1$, ta phân tích $f(n) = n^2.g(n) + a(n-1)^2.g(n-1) + b(n-2)^2.g(n-2)$ rồi đặt $v_n = u_n - n^2.g(n)$.

Ví dụ 1.13: Xác định CTTQ của dãy $(u_n): \begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 4 \\ u_n - 3u_{n-1} + 2u_{n-2} = 2n + 1 \ \forall n \geq 2 \end{cases}$.

Giải:

Vì phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có hai nghiệm $x = 1; x = 2$ nên ta phân tích $2n + 1 = n(kn + l) - 3(n-1)\left[k(n-1) + l\right] + 2(n-2)\left[k(n-2) + l\right]$, cho $n = 0; n = 1$ ta có hệ: $\begin{cases} 5k - l = 1 \\ 3k - l = 3 \end{cases} \Leftrightarrow k = -1; l = -6$.

Đặt $v_n = u_n + n(n+6) \Rightarrow v_0 = 1; v_1 = 11$ và $v_n - 3v_{n-1} + 2v_{n-2} = 0$

$\Rightarrow v_n = \alpha.2^n + \beta.1^n$ với $\alpha, \beta: \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 10; \beta = -9$

$\Rightarrow v_n = 10.2^n - 9 \Rightarrow u_n = 5.2^{n+1} - n^2 - 6n - 9 \quad \forall n = 0,1,2,...$.

Ví dụ 1.14: Tìm CTTQ của dãy số $(u_n):\begin{cases} u_0=-1; u_1=3 \\ u_n-4u_{n-1}+3u_{n-2}=5.2^n \quad \forall n\ge 2\end{cases}$.

Giải: Ta phân tích $2^n=a.2^n-4a.2^{n-1}+3a.2^{n-2}$.
Cho $n=2$ ta có: $4=4a-8a+3a \Leftrightarrow a=-4$

Đặt $v_n=u_n+5.4.2^n \Rightarrow v_0=19; v_1=43$ và $v_n-4v_{n-1}+3v_{n-2}=0$

Vì phương trình $x^2-4x+3=0$ có hai nghiệm $x=1, x=3$ nên $v_n=\alpha.3^n+\beta.1^n$

Với $\alpha,\beta:\begin{cases}\alpha+\beta=19\\ 3\alpha+\beta=43\end{cases} \Leftrightarrow \alpha=12;\beta=7 \Rightarrow v_n=12.3^n+7$.

Vậy $u_n=4.3^{n+1}-5.2^{n+2}+7 \quad \forall n=1,2,\dots$.

Chú ý : Với ý tưởng cách giải trên, ta tìm CTTQ của dãy số (u_n) được xác định bởi:

$\begin{cases}u_0;u_1\\ u_n+a.u_{n-1}+b.u_{n-2}=c.\alpha^n \quad \forall n\ge 2\end{cases}$ (với $a^2-4b\ge 0$) như sau:

Ta phân tích $\alpha^n=k\alpha^n+a.k.\alpha^{n-1}+b.k.\alpha^{n-2}$ (7).
Cho $n=2$ thì (7) trở thành: $k(\alpha^2+a.\alpha+b)=\alpha^2$

Từ đây, ta tìm được $k=\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+a\alpha+b}$ khi α không là nghiệm của phương trình :

$$x^2+ax+b=0 \text{ (8).}$$

Khi đó, ta đặt $v_n=u_n-kc.\alpha^n$, ta có dãy $(v_n):\begin{cases}v_0=u_0-kc; v_1=u_1-kc\alpha\\ v_n+a.v_{n-1}+bv_{n-2}=0 \quad \forall n\ge 2\end{cases}$

$\Rightarrow v_n=p.x_1^n+q.x_2^n$ $(x_1,x_2$ là hai nghiệm của (8)).

$\Rightarrow u_n=p.x_1^n+q.x_2^n+kc.\alpha^n$.

Vậy nếu $x=\alpha$ là một nghiệm của (8), tức là: $\alpha^2+a\alpha+b=0$ thì ta sẽ xử lí thế nào ?
Nhìn lại cách giải ở dạng 3, ta phân tích :

$\alpha^n=kn.\alpha^n+a.k(n-1)\alpha^{n-1}+bk(n-2)\alpha^{n-2}$ (9).

Cho $n=2$ ta có: $\alpha k(2\alpha+a)=\alpha^2 \Leftrightarrow k(2\alpha+a)=\alpha \Leftrightarrow k=\dfrac{\alpha}{2\alpha+a}$ $(\alpha\ne-\dfrac{a}{2})$.

$\Rightarrow (2)$ có nghiệm $k \Leftrightarrow \alpha$ là nghiệm đơn của phương trình (8).

Khi đó: $\Rightarrow u_n=p.x_1^n+q.x_2^n+kcn.\alpha^n$.

Cuối cùng ta xét trường hợp $x = \alpha = -\frac{a}{2}$ là nghiệm kép của (8). Với tư tưởng như trên, ta sẽ phân tích: $\alpha^n = kn^2.\alpha^n + a.k(n-1)^2\alpha^{n-1} + bk(n-2)^2\alpha^{n-2}$ (10).

Cho $n = 2$ ta có: $(10) \Leftrightarrow \alpha^2 = 4k.\alpha^2 + ak.\alpha \Rightarrow k = \frac{\alpha}{4\alpha + a} = \frac{1}{2}$.

Khi đó: $\Rightarrow u_n = p.x_1^n + q.x_2^n + \frac{1}{2}cn^2.\alpha^n$.

Vậy ta có kết quả sau:

Dạng 7: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_0; u_1 \\ u_n + a.u_{n-1} + b.u_{n-2} = c.\alpha^n;\ \forall n \ge 2 \end{cases}$.

Để xác định CTTQ của dãy (u_n) ta làm như sau:

Xét phương trình : $x^2 + ax + b = 0$ (11)

- Nếu phương trình (11) có hai nghiệm phân biệt khác α thì

$$u_n = p.x_1^n + q.x_2^n + kc.\alpha^n \text{ với } k = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + a\alpha + b}.$$

- Nếu phương trình (11) có nghiệm đơn $x = \alpha$ thì

$$u_n = p.x_1^n + q.x_2^n + kcn.\alpha^n \text{ với } k = \frac{\alpha}{2\alpha + a}.$$

- Nếu $x = \alpha$ là nghiệm kép của (11) thì : $u_n = (p + qn + \frac{1}{2}cn^2).\alpha^n$.

Ví dụ 1.15: Xác định CTTQ của dãy (u_n) : $\begin{cases} u_0 = -1; u_1 = 3 \\ u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = 5.2^n\ \ \forall n \ge 2 \end{cases}$.

Giải:

Phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 2; x_2 = 3$, do đó

$$u_n = p.2^n + q.3^n + 5kn.2^n.$$

Với $\begin{cases} k = \dfrac{\alpha}{2\alpha + a} = \dfrac{2}{4-5} = -2 \\ p + q = -1 \\ 2p + 3q + 10k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow k = -2; p = -26; q = 25$.

Vậy $u_n = -26.2^n + 25.3^n - 10n.2^n = 25.3^n - 2^{n+1}(5n+13) \quad \forall n = 1,2,\dots$.

Ví dụ 1.16: Tìm CTTQ của dãy $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 3 \\ u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 3.2^n \end{cases}$.

Giải:

Phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$ có nghiệm kép $x = 2$ nên $u_n = (p + qn + \dfrac{3}{2}n^2)2^n$

Dựa vào u_0, u_1 ta có hệ: $\begin{cases} p = 1 \\ p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow p = 1; q = -1$.

Vậy $u_n = (3n^2 - 2n + 2)2^{n-1} \quad \forall n = 1,2,\dots$.

Với cách xây dựng tương tự ta cũng có được các kết quả sau:

Dạng 8: Cho dãy $(u_n) : \begin{cases} u_0, u_1, u_2 \\ u_n + au_{n-1} + bu_{n-2} + cu_{n-3} = 0 \ \forall n \geq 3 \end{cases}$. Để xác định CTTQ của dãy ta xét phương trình: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (12).

- Nếu (12) có ba nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3 \Rightarrow u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n$. Dựa vào u_0, u_1, u_2 ta tìm được α, β, γ.
- Nếu (12) có một nghiệm đơn, 1 nghiệm kép:
$x_1 = x_2 \neq x_3 \Rightarrow u_n = (\alpha + \beta n)x_1^n + \gamma . x_3^n$
Dựa vào u_0, u_1, u_2 ta tìm được α, β, γ.
- Nếu (12) có nghiệm bội 3 $x_1 = x_2 = x_3 \Rightarrow u_n = (\alpha + \beta n + \gamma n^2)x_1^n$.
Dựa vào u_0, u_1, u_2 ta tìm được α, β, γ.

***Ví dụ 1.17**:* Tìm CTTQ của dãy $(u_n) : \begin{cases} u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 3, \\ u_n = 7u_{n-1} - 11.u_{n-2} + 5.u_{n-3}, \quad \forall n \geq 4 \end{cases}$

Giải : Xét phương trình đặc trưng : $x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = 0$

Phương trình có 3 nghiệm thực: $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = 5$

Vậy $a_n = \alpha + \beta n + \gamma 5^n$

Cho $n = 1,\ n = 2,\ n = 3$ và giải hệ phương trình tạo thành, ta được

$$\alpha = -\frac{1}{16},\ \beta = \frac{3}{4},\ \gamma = \frac{1}{16}$$

Vậy $a_n = -\frac{1}{16} + \frac{3}{4}(n-1) + \frac{1}{16}.5^{n-1}$.

Ví dụ 1.18: Tìm CTTQ của dãy số $(u_n),(v_n) : \begin{cases} u_0 = 2; & u_n = 2u_{n-1} + v_{n-1} \\ v_0 = 1; & v_n = u_{n-1} + 2v_{n-1} \end{cases}$ $\forall n \geq 1$.

Giải:

Ta có: $u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2} + 2v_{n-2} = 2u_{n-1} + u_{n-2} + 2(u_{n-1} - 2u_{n-2})$

$\Rightarrow u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2}$ và $u_1 = 5$

Từ đây, ta có: $u_n = \dfrac{1 + 3^{n+1}}{2} \Rightarrow v_n = u_{n+1} - 2u_n = \dfrac{-1 + 3^{n+1}}{2}$.

Tương tự ta có kết quả sau:

Dạng 9: Cho dãy $(x_n),(y_n) : \begin{cases} x_n = px_{n-1} + qy_{n-1}; & x_1 \\ y_n = ry_{n-1} + sx_{n-1}; & y_1 \end{cases}$. Để xác định CTTQ của hai dãy $(x_n),(y_n)$ ta làm như sau:

Ta biến đổi được: $x_n - (p+s)x_{n-1} + (ps - qr)x_{n-2} = 0$ từ đây ta xác định được x_n, thay vào hệ đã cho ta có được y_n.

Chú ý : Ta có thể tìm CTTQ của dãy số trên theo cách sau:

Ta đưa vào các tham số phụ $\lambda, \lambda' \Rightarrow \begin{cases} x_n - \lambda y_n = (p - \lambda s)(x_{n-1} - \dfrac{q - \lambda r}{\lambda s - p} y_{n-1}) \\ x_n + \lambda' y_n = (p + \lambda' s)(x_{n-1} + \dfrac{q + \lambda' r}{p + \lambda' s} y_{n-1}) \end{cases}$

Ta chọn $\lambda,\ \lambda'$ sao cho $\begin{cases}\lambda = \dfrac{q-\lambda r}{\lambda s - p}\\ \lambda' = \dfrac{q+\lambda' r}{\lambda' s + p}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n - \lambda y_n = (p-\lambda s)(x_{n-1}-\lambda y_{n-1})\\ x_n + \lambda' y_n = (p+\lambda' s)(x_{n-1}+\lambda' y_{n-1})\end{cases}$

$\begin{cases} x_n - \lambda y_n = (p-\lambda s)^{n-1}(x_1-\lambda y_1)\\ x_n + \lambda' y_n = (p+\lambda' s)^{n-1}(x_1+\lambda' y_1)\end{cases}$ giải hệ này ta tìm được $(x_n),\ (y_n)$.

Ví dụ 1.19: Tìm CTTQ của dãy $(u_n):\begin{cases}u_1 = 1\\ u_n = \dfrac{2u_{n-1}}{3u_{n-1}+4} & \forall n \ge 2\end{cases}$.

Giải: Ta có $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{3u_{n-1}+4}{2u_{n-1}} = \dfrac{3}{2} + 2\dfrac{1}{u_{n-1}}$. Đặt $x_n = \dfrac{1}{u_n}$, ta có:

$\begin{cases}x_1 = 1\\ x_n = 2x_{n-1} + \dfrac{3}{2}\end{cases} \Rightarrow x_n = \dfrac{5.2^{n-1}-3}{2} \Rightarrow u_n = \dfrac{2}{5.2^{n-1}-3}$.

***Ví dụ 1.20**:* Tìm CTTQ của dãy số $(u_n):\begin{cases}u_1 = 2\\ u_n = \dfrac{-9u_{n-1}-24}{5u_{n-1}+13} & \forall n \ge 2\end{cases}$.

Giải: Bài toán này không còn đơn giải như bài toán trên vì ở trên tử số còn hệ số tự do, do đó ta tìm cách làm mất hệ số tự do ở trên tử số. Muốn vậy ta đưa vào dãy phụ bằng cách đặt $u_n = x_n + t$. Thay vào công thức truy hồi, ta có:

$$x_n + t = \frac{-9x_{n-1} - 9t - 24}{5x_{n-1}+5t+13} \Rightarrow x_n = \frac{(-9-5t)x_{n-1} - 5t^2 - 22t - 24}{5x_{n-1}+5t+13}$$

Ta chọn $t: 5t^2 + 22t + 24 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow x_1 = 4$

$$\Rightarrow x_n = \frac{x_{n-1}}{5x_{n-1}+3} \Rightarrow \frac{1}{x_n} = 5 + \frac{3}{x_{n-1}} \Rightarrow \frac{1}{x_n} = \frac{11.3^{n-1}-10}{4} \Rightarrow x_n = \frac{4}{11.3^{n-1}-10}$$

$$\Rightarrow u_n = x_n - 2 = \frac{-22.3^{n-1}+24}{11.3^{n-1}-10}.$$

Dạng 10: Cho dãy (u_n): $u_1 = \alpha$; $u_n = \dfrac{pu_{n-1} + q}{ru_{n-1} + s}$ $\forall n \ge 2$. Để tìm CTTQ của dãy (x_n) ta làm như sau:

Đặt $u_n = x_n + t$, thay vào công thức truy hồi của dãy ta có:

$$x_n = \frac{px_{n-1} + pt + q}{ru_{n-1} + rt + s} - t = \frac{(p - rt)x_{n-1} - rt^2 + (p - s)t + q}{rx_{n-1} + rt + s} \quad (13).$$

Ta chọn $t : rt^2 + (s - p)t - q = 0$. Khi đó ta chuyển (13) về dạng: $\dfrac{1}{x_n} = a\dfrac{1}{x_{n-1}} + b$

Từ đây ta tìm được $\dfrac{1}{x_n}$, suy ra u_n.

Ví dụ 1.21: Xác định CTTQ của hai dãy số $(u_n),(v_n) : \begin{cases} u_1 = 2 \\ v_1 = 1 \end{cases}$ và

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1}^2 + 2v_{n-1}^2 \\ v_n = 2u_{n-1}v_{n-1} \end{cases} \quad \forall n \ge 2.$$

Giải:

Ta có: $\begin{cases} u_n = u_{n-1}^2 + 2v_{n-1}^2 \\ \sqrt{2}v_n = 2\sqrt{2}u_{n-1}v_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n + \sqrt{2}v_n = (u_{n-1} + \sqrt{2}v_{n-1})^2 \\ u_n - \sqrt{2}v_n = (u_{n-1} - \sqrt{2}v_{n-1})^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_n + \sqrt{2}v_n = (u_1 + \sqrt{2}v_1)^{2^{n-1}} = (2 + \sqrt{2})^{2^{n-1}} \\ u_n - \sqrt{2}v_n = (u_1 - \sqrt{2}v_1)^{2^{n-1}} = (2 - \sqrt{2})^{2^{n-1}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2}\left[(2 + \sqrt{2})^{2^{n-1}} + (2 - \sqrt{2})^{2^{n-1}}\right] \\ v_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[(2 + \sqrt{2})^{2^{n-1}} - (2 - \sqrt{2})^{2^{n-1}}\right] \end{cases}.$$

Nhận xét: Từ $\begin{cases} u_n = u_{n-1}^2 + 2v_{n-1}^2 \\ v_n = 2u_{n-1}v_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{u_{n-1}^2 + 2v_{n-1}^2}{2u_{n-1}v_{n-1}} = \dfrac{\left(\dfrac{u_{n-1}}{v_{n-1}}\right)^2 + 2}{2\left(\dfrac{u_{n-1}}{v_{n-1}}\right)}$

Do vậy nếu ta đặt $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ ta được dãy số $(x_n) : \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_n = \dfrac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}} \end{cases}$. Ta có bài toán sau:

Ví dụ 1.22: Xác định CTTQ của dãy số $(x_n) : \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_n = \dfrac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$.

Giải:

Xét hai dãy $(u_n),(v_n) : \begin{cases} u_1 = 2 \\ v_1 = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} u_n = u_{n-1}^2 + 2v_{n-1}^2 \\ v_n = 2u_{n-1}v_{n-1} \end{cases} \quad \forall n \geq 2$.

Ta chứng minh $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ (14).

- $n = 2 \Rightarrow x_2 = \dfrac{u_2}{v_2} = 2 \Rightarrow n = 2$ (14) đúng.
- Giả sử $x_{n-1} = \dfrac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \Rightarrow x_n = \dfrac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}} = \dfrac{u_{n-1}^2 + 2v_{n-1}^2}{2u_{n-1}v_{n-1}} = \dfrac{u_n}{v_n} \Rightarrow (14)$ được chứng minh

Theo kết quả bài toán trên, ta có: $x_n = \sqrt{2}\dfrac{(2+\sqrt{2})^{2^{n-1}} + (2-\sqrt{2})^{2^{n-1}}}{(2+\sqrt{2})^{2^{n-1}} - (2-\sqrt{2})^{2^{n-1}}}$.

Dạng 11:

1) Từ hai ví dụ trên ta có được cách tìm CTTQ của hai dãy số $(u_n),(v_n)$ được xác định bởi: $\begin{cases} u_n = u_{n-1}^2 + a.v_{n-1}^2 & ;\ u_1 = \alpha \\ v_n = 2v_{n-1}u_{n-1} & ;\ v_1 = \beta \end{cases}$ (trong đó a là số thực dương) như sau:

Ta có: $\begin{cases} u_n = u_{n-1}^2 + a.v_{n-1}^2 \\ \sqrt{a}.v_n = 2\sqrt{a}.v_{n-1}u_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n + \sqrt{a}u_{n-1} = (u_{n-1} + \sqrt{a}u_{n-1})^2 \\ u_n - \sqrt{a}u_{n-1} = (u_{n-1} - \sqrt{a}u_{n-1})^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2}\left[(\alpha + \beta\sqrt{a})^{2^{n-1}} + (\alpha - \beta\sqrt{a})^{2^{n-1}}\right] \\ v_n = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\left[(\alpha + \beta\sqrt{a})^{2^{n-1}} - (\alpha - \beta\sqrt{a})^{2^{n-1}}\right] \end{cases}.$$

2) Áp dụng kết quả trên ta tìm được CTTQ của dãy $(x_n) : \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_n = \dfrac{x_{n-1}^2 + a}{2x_{n-1}} \end{cases}$.

Xét hai dãy $(u_n),(v_n) : \begin{cases} u_n = u_{n-1}^2 + a.v_{n-1}^2 \ ; \ u_1 = \alpha \\ v_n = 2v_{n-1}u_{n-1} \ ; \ v_1 = 1 \end{cases}$

Khi đó: $x_n = \dfrac{u_n}{v_n} = \sqrt{a}\,\dfrac{(\alpha + \sqrt{a})^{2^{n-1}} + (\alpha - \sqrt{a})^{2^{n-1}}}{(\alpha + \sqrt{a})^{2^{n-1}} + (\alpha - \sqrt{a})^{2^{n-1}}}$.

Ví dụ 1.23: Cho dãy $(u_n) : \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 5u_{n-1} + \sqrt{24u_{n-1}^2 - 8} \ \ \forall n \ge 2 \end{cases}$. Tìm u_n ?

Giải:

Ta có: $u_2 = 9; u_3 = 89; u_4 = 881$. Giả sử: $u_n = xu_{n-1} + yu_{n-2}$

$\Rightarrow \begin{cases} 9x + y = 89 \\ 89x + 9y = 881 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = -1 \end{cases}$. Ta chứng minh: $u_n = 10u_{n-1} - u_{n-2} \ \ \forall n \ge 3$

Từ công thức truy hồi của dãy ta có: $(u_n - 5u_{n-1})^2 = 24u_{n-1}^2 - 8$

$\Leftrightarrow u_n^2 - 10u_nu_{n-1} + u_{n-1}^2 + 8 = 0 \quad (15)$ thay n bởi $n-1$, ta được:

$u_{n-2}^2 - 10u_{n-2}u_{n-1} + u_{n-1}^2 - 8 = 0 \quad (16)$.

Từ $(15),(16) \Rightarrow u_{n-2}, u_n$ là hai nghiệm của phương trình : $t^2 - 10u_{n-1}t + u_{n-1}^2 - 8 = 0$

Áp dụng định lí Viet, ta có: $u_n + u_{n-2} = 10u_{n-1}$.

Vậy $u_n = \dfrac{\sqrt{6} - 2}{2\sqrt{6}}\left(5 - 2\sqrt{6}\right)^{n-1} + \dfrac{\sqrt{6} + 2}{2\sqrt{6}}\left(5 + 2\sqrt{6}\right)^{n-1}$.

Dạng 12:

1) Dãy $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 5u_{n-1} + \sqrt{au_{n-1}^2 - 8} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$ là dãy nguyên $\Leftrightarrow a = 24$.

Thật vậy: $u_2 = 5 + \sqrt{a-8} = 5 + t \ (t = \sqrt{a-8} \in \mathbb{N}) \Rightarrow u_3 = 5 + \sqrt{(t^2+8)(t+5)^2 - 8}$

$\Rightarrow u_3 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow f(t) = (t^2+8)(t+5)^2 - 8 = m^2 \quad (m \in \mathbb{Z})$.

Mà $(t^2 + 5t + 4)^2 < f(t) < (t^2 + 5t + 14)^2$ kết hợp với $f(t)$ là số chẵn ta suy ra $m = t^2 + 5t + x$ với $x \in \{6, 8, 10, 12\}$. Thử trực tiếp ta thấy $t = 4 \Rightarrow a = 24$.

2) Với dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_n = au_{n-1} + \sqrt{bu_{n-1}^2 + c} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$, với $a^2 - b = 1$ ta xác định CTTQ như sau:

Từ dãy truy hồi $\Rightarrow (u_n - au_{n-1})^2 = bu_{n-1}^2 + c \Leftrightarrow u_n^2 - 2au_n u_{n-1} + u_{n-1}^2 - c = 0$

Thay n bởi $n-1$, ta có: $u_{n-2}^2 - 2au_{n-1}u_{n-2} + u_{n-1}^2 - c = 0 \Rightarrow u_n + u_{n-2} = 2au_{n-1}$.

3) Với dãy $(u_n): \begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{a + \sqrt{cu_{n-1}^2 + b}} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$,trong đó $\alpha > 0; a > 1;\ a^2 - b = 1$ ta xác định CTTQ như sau:

Ta viết lại công thức truy hồi dưới dạng: $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{a}{u_{n-1}} + \sqrt{c + \dfrac{b}{u_{n-1}^2}}$. Đặt $x_n = \dfrac{1}{u_n}$

Ta có $u_n = au_{n-1} + \sqrt{bx_{n-1}^2 + c}$ đây là dãy mà ta đã xét ở trên.

Ví dụ 1.24: Cho dãy $(u_n): \begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}^2 + 2}{u_{n-2}} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$. Tìm u_n ?

Giải:

Ta có: $u_3 = 3; u_4 = 11; u_5 = 41$. Ta giả sử $u_n = xu_{n-1} + yu_{n-2} + z$ .Từ $u_3 = 3; u_4 = 11;$

$u_5 = 41$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + y + z = 11 \\ 11x + 3y + z = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$

Ta chứng minh $(u_n) : \begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} \quad \forall n \geq 3 \end{cases}$.

- Với $n = 3 \Rightarrow u_3 = 4u_2 - u_1 = 3 \Rightarrow n = 3$ đúng
- Giả sử $u_k = 4u_{k-1} - u_{k-2}$. Ta có:

$$u_{k+1} = \frac{u_k^2 + 2}{u_{k-1}} = \frac{\left(4u_{k-1} - u_{k-2}\right)^2 + 2}{u_{k-1}} = \frac{16u_{k-1}^2 - 8u_{k-1}u_{k-2} + u_{k-2}^2 + 2}{u_{k-1}}$$

$$= \frac{16u_{k-1}^2 - 8u_{k-1}u_{k-2} + u_{k-1}u_{k-3}}{u_{k-1}} = 16u_{k-1} - 8u_{k-2} + u_{k-3}$$

$$= 4(4u_{k-1} - u_{k-2}) - (4u_{k-2} - u_{k-3}) = 4u_k - u_{k-1}$$

Theo nguyên lí quy nạp ta có đpcm $\Rightarrow u_n = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}}\left(2 - \sqrt{3}\right)^{n-1} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}}\left(2 + \sqrt{3}\right)^{n-1}$.

II. SỬ DỤNG PHÉP THẾ LƯỢNG GIÁC ĐỂ XÁC ĐỊNH CTTQ CỦA DÃY SỐ

Nhiều dãy số có công thức truy hồi phức tạp trở thành đơn giản nhờ phép thế lượng giác. Khi trong bài toán xuất hiện những yếu tố gợi cho ta nhớ đến những công thức lượng giác thì ta có thể thử với phương pháp thế lượng giác. Ta xét các ví dụ sau

Ví dụ 2.1: Cho dãy $(u_n):\begin{cases} u_1=\dfrac{1}{2} \\ u_n=2u_{n-1}^2-1 \quad \forall n\ge 2\end{cases}$. Xác định CTTQ của dãy (u_n).

Giải:

Từ công thức truy hồi của dãy, ta liên tưởng đến công thức nhân đôi của hàm số côsin

Ta có: $u_1=\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow u_2=2\cos^2\dfrac{\pi}{3}-1=\cos\dfrac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow u_3=2\cos^2\dfrac{2\pi}{3}-1=\cos\dfrac{4\pi}{3}\Rightarrow u_4=\cos\dfrac{8\pi}{3}$....

Ta chứng minh $u_n=\cos\dfrac{2^{n-1}\pi}{3}$. Thật vậy

- Với $n=2\Rightarrow u_2=\cos\dfrac{2^{2-1}\pi}{3}=\cos\dfrac{2\pi}{3}$ (đúng)
- Giả sử $u_{n-1}=\cos\dfrac{2^{n-2}\pi}{3}\Rightarrow u_n=2u_{n-1}^2-1=2\cos^2\dfrac{2^{n-1}\pi}{3}-1=\cos\dfrac{2^{n-1}\pi}{3}$

Vậy $u_n=\cos\dfrac{2^{n-1}\pi}{3}\ \ \forall n\ge 1$.

Dạng 13: Để xác định CTTQ của dãy số $(u_n):\begin{cases} u_1 \\ u_n=2u_{n-1}^2-1 \quad \forall n\ge 2\end{cases}$ ta làm như sau:

- Nếu $|u_1|\le 1$, ta đặt $u_1=\cos\alpha$. Khi đó ta có: $u_n=\cos 2^{n-1}\alpha$.
- Nếu $|u_1|>1$ ta đặt $u_1=\dfrac{1}{2}(a+\dfrac{1}{a})$ (trong đó $a\ne 0$ và cùng dấu với u_1).

Khi đó $u_2=\dfrac{1}{2}(a^2+2+\dfrac{1}{a^2})-1=\dfrac{1}{2}(a^2+\dfrac{1}{a^2})\Rightarrow u_3=\dfrac{1}{2}(a^4+\dfrac{1}{a^4})$....

Ta chứng minh được $u_n = \frac{1}{2}(a^{2^{n-1}} + \frac{1}{a^{2^{n-1}}})\quad \forall n \ge 1$. Trong đó a là nghiệm (cùng dấu với u_1) của phương trình : $a^2 - 2u_1 a + 1 = 0$. Vì phương trình này có hai nghiệm có tích bằng 1 nên ta có thể viết CTTQ của dãy như sau

$$u_n = \frac{1}{2}\left[\left(u_1 - \sqrt{u_1^2 - 1}\right)^{2^{n-1}} + \left(u_1 + \sqrt{u_1^2 - 1}\right)^{2^{n-1}}\right].$$

Ví dụ 2.2: Xác định CTTQ của dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ u_n = 4u_{n-1}^3 - 3u_{n-1} \quad \forall n \ge 2 \end{cases}$.

Giải:

Ta có: $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow u_2 = 4\cos^3\frac{\pi}{6} - 3\cos\frac{\pi}{6} = \cos 3\frac{\pi}{6} \Rightarrow u_3 = \cos\frac{3^2\pi}{6}$.....

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $u_n = \cos\frac{3^{n-1}\pi}{6}$.

Dạng 14:

1) Để tìm CTTQ của dãy $(u_n): \begin{cases} u_1 = p \\ u_n = 4u_{n-1}^3 - 3u_{n-1} \quad \forall n \ge 2 \end{cases}$, ta làm như sau

- Nếu $|p| \le 1 \Rightarrow \exists \alpha \in [0;\pi] : \cos\alpha = p$.

Khi đó bằng quy nạp ta chứng minh được : $u_n = \cos 3^{n-1}\alpha$.

- Nếu $|p| > 1$, ta đặt $u_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ (a cùng dấu với u_1)

Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n = \frac{1}{2}\left(a^{3^{n-1}} + \frac{1}{a^{3^{n-1}}}\right)$.

Hay $u_n = \frac{1}{2}\left[\left(u_1 - \sqrt{u_1^2 - 1}\right)^{3^{n-1}} + \left(u_1 + \sqrt{u_1^2 - 1}\right)^{3^{n-1}}\right]$.

2) Từ trường hợp thứ hai của bài toán trên, ta có cách tìm CTTQ của dãy số

$(u_n):\begin{cases}u_1=p\\ u_n=4u_{n-1}^3+3u_{n-1}\ \forall n\ge 2\end{cases}$ bằng cách đặt $u_1=\frac{1}{2}(a-\frac{1}{a})$. Khi đó bằng quy nạp ta chứng minh được :

$$u_n=\frac{1}{2}\left(a^{3^{n-1}}-\frac{1}{a^{3^{n-1}}}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(u_1+\sqrt{u_1^2+1}\right)^{3^{n-1}}+\left(u_1-\sqrt{u_1^2+1}\right)^{3^{n-1}}\right].$$

Chú ý : Trong một số trường hợp ta xác định được CTTQ của dãy (u_n) cho bởi:

$$\begin{cases}u_1\\ u_n=u_{n-1}^3+au_{n-1}^2+bu_{n-1}+c\ \forall n\ge 2\end{cases}.$$

Bằng cách đưa vào dãy phụ để chuyển dãy đã cho về một trong hai dạng ở trên.

Ví dụ 2.3: Xác định CTTQ của dãy $(u_n):u_1=\frac{3}{\sqrt{6}}$ và

$$u_n=24u_{n-1}^3-12\sqrt{6}u_{n-1}^2+15u_{n-1}-\sqrt{6}\quad\forall n\ge 2.$$

Giải:

Đặt $u_n=x.v_n+y$. Thay vào công thức truy hồi của dãy, biến đổi và rút gọn ta được

$$x.v_n+y=24x^3v_{n-1}^3+12(6x^2y-\sqrt{6}x^2)v_{n-1}^2+3(24xy^2-8\sqrt{6}xy+5x)v_{n-1}+$$
$$+24y^3-12\sqrt{6}y^2+15y-\sqrt{6}.$$

Ta chọn $y:\begin{cases}6x^2y-\sqrt{6}x^2=0\\ 24y^3-12\sqrt{6}y^2+15y-\sqrt{6}=y\end{cases}\Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Khi đó: $x.v_n=24x^3v_{n-1}^3+3x.v_{n-1}\Leftrightarrow v_n=24x^2v_{n-1}^3+3v_{n-1}$. Ta chọn $x=\frac{1}{\sqrt{6}}$

$\Rightarrow v_n=4v_{n-1}^3+3v_{n-1}$ và $v_1=2$.

$\Rightarrow v_n=\frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{5})^{3^{n-1}}+(2-\sqrt{5})^{3^{n-1}}\right]$.

Vậy $u_n=\frac{1}{2\sqrt{6}}\left[(2+\sqrt{5})^{3^{n-1}}+(2-\sqrt{5})^{3^{n-1}}\right]+\frac{1}{\sqrt{6}}\quad\forall n=1,2,....$

Ví dụ 2.4: Xác định CTTQ của dãy (u_n) : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{2} \\ u_n = 2 - u_{n-1}^2 \quad \forall n \ge 2 \end{cases}$.

Giải: Đặt $-\dfrac{3}{4} = \cos\alpha,\ \alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$, khi đó :

$u_1 = -2\cos\alpha \Rightarrow u_2 = 2(1 - 2\cos^2\alpha) = -2\cos 2\alpha$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n = -2\cos 2^{n-1}\alpha$.

Ví dụ 2.5: Tìm CTTQ của dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = \dfrac{\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - u_{n-1}^2}}}{2} \quad \forall n \ge 2 \end{cases}$.

Giải: Từ công thức truy hồi của dãy, gợi ta nhớ đến công thức lượng giác $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$.

Ta có: $u_1 = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow u_2 = \dfrac{\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \sin^2\dfrac{\pi}{6}}}}{2} = \dfrac{\sqrt{2(1 - \cos\dfrac{\pi}{6})}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{2.6}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $u_n = \sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}.6}$.

Ví dụ 2.6: Cho a,b là hai số thực dương không đổi thỏa mãn $a < b$ và hai dãy $(a_n),(b_n)$ được xác định: $\begin{cases} a_1 = \dfrac{a+b}{2}; b_1 = \sqrt{b.a_1} \\ a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}; b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}} \quad \forall n \ge 2 \end{cases}$. Tìm a_n và b_n.

Giải:

Ta có: $0 < \dfrac{a}{b} < 1$ nên ta đặt $\dfrac{a}{b} = \cos\alpha$ với $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Khi đó: $a_1 = \dfrac{b\cos\alpha + b}{2} = \dfrac{b(1+\cos\alpha)}{2} = b\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ và $b_1 = \sqrt{b.b\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} = b\cos\dfrac{\alpha}{2}$

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{b\cos^2\frac{\alpha}{2}+b\cos\frac{\alpha}{2}}{2}=b\cos\frac{\alpha}{2}.\cos^2\frac{\alpha}{2^2} \text{ và } b_2=b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}.$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$a_n=b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\ldots\cos^2\frac{\alpha}{2^n} \text{ và } b_n=b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n}.$$

Ví dụ 2.7: Cho dãy $(u_n):\begin{cases}u_1=\sqrt{3}\\ u_n=\dfrac{u_{n-1}+\sqrt{2}-1}{1+(1-\sqrt{2})u_{n-1}} \quad \forall n\ge 2\end{cases}$. Tính u_{2003} (***Trích đề thi Olympic 30 – 4 – 2003 Khối 11***).

Giải: Ta có $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1\Rightarrow u_n=\dfrac{u_{n-1}+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan\frac{\pi}{8}u_{n-1}}$

Mà $u_1=\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}\Rightarrow u_2=\dfrac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{8}}=\tan(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{8})$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n=\tan\left[\frac{\pi}{3}+(n-1)\frac{\pi}{8}\right]$.

Vậy $u_{2003}=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2002\pi}{8}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=-(\sqrt{3}+2)$.

Chú ý : Để tìm CTTQ của dãy $(u_n):\begin{cases}u_1=a\\ u_n=\dfrac{u_{n-1}+b}{1-bu_{n-1}} \quad \forall n\ge 2\end{cases}$.

Ta đặt $a=\tan\alpha; b=\tan\beta$, khi đó ta chứng minh được: $u_n=\tan\left[\alpha+(n-1)\beta\right]$

Ví dụ 2.8: Tìm CTTQ của dãy số $(u_n):\begin{cases}u_1=\sqrt{3}\\ u_n=\dfrac{u_{n-1}}{1+\sqrt{1+u_{n-1}^2}} \quad \forall n\ge 2\end{cases}$.

Giải: Ta có: $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n-1}} + \sqrt{1 + \frac{1}{u_{n-1}^2}}$. Đặt $x_n = \frac{1}{u_n}$ khi đó ta được dãy (x_n) được xác định như sau: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $x_n = x_{n-1} + \sqrt{1 + x_{n-1}^2}$.

Vì $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot\frac{\pi}{3} \Rightarrow x_2 = \cot\frac{\pi}{3} + \sqrt{1 + \cot^2\frac{\pi}{3}} = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \cot\frac{\pi}{2.3}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $x_n = \cot\frac{\pi}{2^{n-1}.3} \Rightarrow u_n = \tan\frac{\pi}{2^{n-1}.3}\ \ \forall n = 1,2,...$

III. ỨNG DỤNG BÀI TOÁN TÌM CTTQ CỦA DÃY SỐ VÀO GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ - TỔ HỢP

Trong mục này chúng tôi đưa ra một số ví dụ các bài toán về dãy số và tổ hợp mà quá trình giải các bài toán đó chúng ta vận dụng một số kết quả ở trên.

Ví dụ 3.1: Cho dãy số $(a_n): a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 1 \quad \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng $A = 4a_n a_{n+2} + 1$ là số chính phương.

Giải:

Từ công thức truy hồi của dãy ta thay $n+1$ bởi n ta được:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 1 \\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1 \end{cases} \Rightarrow a_{n+1} - 3a_n + 3a_{n-1} - a_{n-2} = 0.$$

Xét phương trình đặc trưng $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

$\Rightarrow a_n = (\alpha + \beta n + \gamma n^2)$, do $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = \gamma = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2}(n + n^2) \Rightarrow A = n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2 + 3n + 1)^2 \Rightarrow$đpcm.

Ví dụ 3.2: Cho dãy số $(x_n): x_1 = 7, x_2 = 50; x_{n+1} = 4x_n + 5x_{n-1} - 1975 \quad \forall n \geq 2$. Chứng minh rằng $x_{1996} \vdots 1997$ ***(HSG Quốc Gia – 1997)***

Giải:

Vì $-1975 = 22 \pmod{1997}$ do đó ta chỉ cần chứng minh dãy

$x_{n+1} = 4x_n + 5x_{n-1} + 22 \vdots 1997$.

Đặt $y_{n+1} = ax_{n+1} + b = a(4x_n + 5x_{n-1} + 22) + b = 4(ax_n + b) + 5(ax_{n-1} + b) + 22a - 8b$

$= 4y_n + 5y_{n-1} + 22a - 8b$.

Ta chọn a, b sao cho: $22a - 8b = 0$, ta chọn $a = 4 \Rightarrow b = 11$.

$\Rightarrow y_{n+1} = 4x_{n+1} + 11 \Rightarrow y_1 = 39, y_2 = 211; y_{n+1} = 4y_n + 5y_{n-1}$

Từ đây ta có được: $y_n = \dfrac{8(-1)^n + 25.5^n}{3} \Rightarrow y_{1996} = \dfrac{8 + 25.5^{1996}}{3}$.

Vì $8 + 25.5^{1996} \equiv -1 + 1 = 0 \pmod 3 \Rightarrow y_{1996} \in \mathbb{Z}$

Theo định lí Fecma $5^{1996} \equiv 1 \pmod{1997} \Rightarrow y_{1996} \equiv 11 \pmod{1997}$

$\Rightarrow 4x_{1996} + 11 \equiv 11 \pmod{1997} \Rightarrow x_{1996} \equiv 0 \pmod{1997}$.

Nhận xét: Từ bài toán trên ta có kết quả tổng quát hơn là: $x_{p-1} \vdots p$ với p là số nguyên tố lẻ.

Ví dụ 3.3: Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_0 = 20; u_1 = 100 \\ u_{n+1} = 4u_n + 5u_{n-1} + 20 \ \forall n \geq 2 \end{cases}$. Tìm số nguyên dương h bé nhất sao cho: $u_{n+h} - u_n \vdots 1998 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ (***HSG Quốc Gia Bảng A – 1998***).

Giải:

Đặt $a_n = 2u_n + 5$, ta có dãy $(a_n): \begin{cases} a_0 = 45; a_1 = 205 \\ a_{n+1} = 4a_n + 5a_{n-1} \ \forall n \geq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow a_n = \frac{10}{3}(-1)^n + \frac{125}{3}.5^n \Rightarrow u_n = \frac{125}{6}.5^n + \frac{5}{3}(-1)^n - \frac{5}{2}$.

Vì $a_{n+h} - a_n = 2(u_{n+h} - u_n) \Rightarrow u_{n+h} - u_n \vdots 1998 \Leftrightarrow a_{n+h} - a_n \vdots 2.1998 = 2^2.3^3.37$

Mà $a_{n+h} - a_n = \frac{(-1)^n.10}{3}\left[(-1)^h - 1\right] + \frac{125.5^n}{3}(5^h - 1)$

- Nếu h chẵn $\Rightarrow a_{n+h} - a_n = \frac{125.5^n}{3}(5^h - 1) \vdots 4.27.37 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^h - 1 \vdots 4 \\ 5^h - 1 \vdots 81 \\ 5^h - 1 \vdots 37 \end{cases}$ (17)

Gọi k là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $5^k - 1 \vdots 37$. Vì $5^{36} - 1 \vdots 37 \Rightarrow 36 \vdots k$

$\Rightarrow k \in \{1, 2, 3, 4, 12, 18, 36\}$ thử trực tiếp ta thấy chỉ có $k = 36$ thỏa mãn

$\Rightarrow 5^h - 1 \vdots 37 \Rightarrow h \vdots 36$ (18)

Chứng minh tương tự, ta cũng có: $5^h - 1 \vdots 81 \Rightarrow h \vdots \varphi(81) = 54$ (19)

Từ (18) và (19) ta suy ra (17) $\Leftrightarrow h \vdots [36, 54] = 108 \Rightarrow h \geq 108$.

- Nếu h lẻ: Vì $u_{n+h} \equiv u_n \pmod{1998}$

Nên ta có: $\begin{cases} u_h \equiv u_0 \equiv 20 \pmod{1998} \\ u_{h+1} \equiv u_1 \equiv 100 \pmod{1998} \end{cases} \Rightarrow 5u_{h-1} \equiv u_{h+1} - 4u_h - 20 \equiv 0 \pmod{1998}$

$\Rightarrow u_{h-1} \vdots 0 \pmod{1998}$

Vì h lẻ $\Rightarrow h - 1$ chẵn $\Rightarrow u_h = \frac{125}{6}.5^h - \frac{25}{6}$ và $u_{h-1} = \frac{125}{6}.5^{h-1} - \frac{5}{6}$

$\Rightarrow u_h \equiv 5u_{h-1} \equiv 0 \pmod{1998}$ mâu thuẫn với $u_h \equiv 20 \pmod{1998}$.

Với $h = 108$ ta dễ dàng chứng minh được $u_{n+h} \equiv u_n (\bmod 1998) \quad \forall n \geq 1$.
Vậy $h = 108$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3.4: Cho dãy $(x_n): x_0 = 2; x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 1}{x_n + 2}$

1) Tính x_{2000} ?

2) Tìm phần nguyên của $A = \sum\limits_{i=1}^{2000} x_i$ ***(Olympic 30 – 4 – 2000 khối 11).***

Giải: Ta có: $x_{n+1} - 1 = \dfrac{x_n - 1}{x_n + 2} \Rightarrow \dfrac{1}{x_{n+1} - 1} = 1 + \dfrac{3}{x_n - 1}$. Đặt $a_n = \dfrac{1}{x_n - 1} \Rightarrow a_0 = 1$ và

$a_{n+1} = 3a_n + 1 \Rightarrow a_n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2} \Rightarrow x_n = 1 + \dfrac{2}{3^{n+1} - 1}$.

a) Ta có: $x_{2000} = \dfrac{3^{2001} + 1}{3^{2001} - 1}$

b) Ta có: $A = 2000 + 2\sum\limits_{i=1}^{2000} \dfrac{1}{3^{i+1} - 1} \Rightarrow 2000 < A < 2000 + \dfrac{2}{3}\sum\limits_{i=1}^{2000} \dfrac{1}{3^i} < 2001$

Vậy $[A] = 2000$.

Ví dụ 3.5: Cho dãy $(x_n): x_1 = 1;\ x_{n+1} = \dfrac{(2 + \cos 2\alpha)x_n + \cos^2 \alpha}{(2 - 2\cos 2\alpha)x_n + 2 - \cos 2\alpha}$.

Đặt $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2x_i + 1} \quad \forall n \geq 1$. Tìm α để dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó. ***(HSG Quốc Gia Bảng A – 2004).***

Giải:

Ta có $\dfrac{1}{2x_{n+1} + 1} = \dfrac{2\sin^2 \alpha}{3} + \dfrac{1}{3(2x_n + 1)} \Rightarrow \dfrac{1}{2x_n + 1} = \dfrac{1}{3^n} + (1 - \dfrac{1}{3^{n-1}})\sin^2 \alpha$

$\Rightarrow y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2x_i + 1} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{3^i} + \sin^2 \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} (1 - \dfrac{1}{3^{i-1}}) = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{3^n}) + [n - \dfrac{3}{2}(1 - \dfrac{1}{3^n})]\sin^2 \alpha$

Vì $\lim \dfrac{1}{3^n} = 0$ nên dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn $\Leftrightarrow \sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi$

Khi đó $\lim y_n = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 3.6: Cho hai dãy $(x_n),(y_n): \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_{n+1} = -3x_n^2 - 2x_n y_n + 8y_n^2 \\ y_{n+1} = 2x_n^2 + 3x_n y_n - 2y_n^2 \end{cases} \quad \forall n \geq 1$.

Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $x_p + y_p$ không chia hết cho p. ***(TH&TT – 327)***

Giải:

Ta có: $x_n + 2y_n = (x_{n-1} + 2y_{n-1})^2 = ... = (x_1 + 2y_1)^{2^{n-1}} = 1$ **(20)**

Giả sử có một số tự nhiên k để $y_k = 2x_k \Rightarrow y_{k+1} = 0$. Khi đó, ta có:

$\begin{cases} x_{k+2} = -3x_{k+1}^2 \\ x_{k+2} = 1 \end{cases}$ vô lí. Vậy $y_{n+1} = (2x_n - y_n)(x_n + 2y_n) \neq 0 \quad \forall n$.

Suy ra : $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = -\frac{(3x_n - 4y_n)(x_n + 2y_n)}{(2x_n - y_n)(x_n + 2y_n)} = \frac{-3x_n + 4y_n}{2x_n - y_n}$.

Đặt $a_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \Rightarrow a_1 = -1; a_{n+1} = \frac{-3a_n + 4}{2a_n - 1}$

$\Rightarrow a_{n+1} + 2 = \frac{a_n + 2}{2a_n - 1} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1} + 2} = 2 - \frac{5}{a_n + 2} \Rightarrow \frac{1}{a_n + 2} = \frac{1 + 2(-5)^{n-1}}{3}$

$\Rightarrow a_n = \frac{1 - 4.(-5)^{n-1}}{1 + 2.(-5)^{n-1}} = \frac{x_n}{y_n}$ **(21)**

Từ (20) và (21) $\Rightarrow x_n = \frac{1 - 4.(-5)^{n-1}}{3}; y_n = \frac{1 + 2.(-5)^{n-1}}{3} \Rightarrow x_n + y_n = \frac{2 - 2(-5)^{n-1}}{3}$.

* Nếu $p = 2 \Rightarrow x_2 + y_2 = 4 \vdots 2 \Rightarrow p = 2$ không thỏa yêu cầu bài toán.

* Nếu $p = 3 \Rightarrow x_3 + y_3 = -16$ không chia hết cho $3 \Rightarrow p = 3$ thỏa yêu cầu bài toán.

* Nếu $p = 5$ ta thấy cũng thỏa yêu cầu bài toán.

* Nếu $p > 5 \Rightarrow (-5)^{p-1} \equiv 1 (\bmod p) \Rightarrow x_p + y_p \equiv 0 (\bmod p)$

Vậy $p = 3, p = 5$ là hai giá trị cần tìm.

Ví dụ 3.7: Cho dãy (u_n) : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{3} \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{2(2n-1)u_{n-1}+1} & \forall n \ge 2 \end{cases}$. Tính tổng của 2001 số hạng đầu tiên của dãy (u_n) (***HSG Quốc Gia – 2001***).

Giải:

Ta có: $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u_{n-1}} + 4n - 2$ (22).

Ta phân tích $4n - 2 = k\left[n^2 - (n-1)^2\right] + l\left[n - (n-1)\right]$. Cho $n = 0; n = 1$, ta có hệ

$\begin{cases} -k + l = -2 \\ k + l = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2; l = 0$.

Suy ra $(22) \Leftrightarrow \dfrac{1}{u_n} - 2n^2 = \dfrac{1}{u_{n-1}} - 2(n-1)^2 = ... = \dfrac{1}{u_1} - 2 = -\dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{4n^2 - 1}{2} = \frac{(2n-1)(2n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2001} u_i = \sum_{i=1}^{2001}\left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}\right) = 1 - \frac{1}{4003} = \frac{4002}{4003}.$$

Ví dụ 3.8*:* Cho hai dãy số $(x_n);(y_n)$ xác định : $\begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ y_1 = \sqrt{3} \end{cases}$ và $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + \sqrt{1 + x_{n-1}^2} \\ y_n = \dfrac{y_{n-1}}{1 + \sqrt{1 + y_{n-1}}} \end{cases}$ $\forall n \ge 2$. Chứng minh rằng $2 < x_n y_n < 3 \quad \forall n \ge 2$. (**Belarus 1999**).

Giải:

Ta có: $x_1 = \sqrt{3} = \cot\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x_2 = \cot\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{1 + \cot^2\dfrac{\pi}{6}} = \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{6} + 1}{\sin\dfrac{\pi}{6}} = \cot\dfrac{\pi}{2.6}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $x_n = \cot\frac{\pi}{2^{n-1}.6}$.

Theo kết quả của ví dụ 2.8, ta có: $y_n = \tan\frac{\pi}{2^{n-1}.3}$

Đặt $\alpha_n = \frac{\pi}{2^n.3} \Rightarrow x_n = \cot\alpha_n;\ y_n = \tan 2\alpha_n \Rightarrow x_n.y_n = \tan 2\alpha_n.\cot\alpha_n$

Đặt $t = \tan\alpha_n \Rightarrow \tan 2\alpha_n.\cot\alpha_n = \frac{2t}{1-t^2}.\frac{1}{t} = \frac{2}{1-t^2}$.

Vì $n \geq 2 \Rightarrow 0 < \alpha_n < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 < t < \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq 1 - t^2 < 1$

$\Rightarrow 2 < \frac{2}{1-t^2} < 3 \Rightarrow 2 < x_n y_n \leq 3 \quad \forall n \geq 2 \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 3.9: Cho dãy số (x_n) : $\begin{cases} |x_1| < 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{-x_n + \sqrt{3-3x_n^2}}{2} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$.

1) Cần có thêm điều kiện gì đối với x_1 để dãy gồm toàn số dương ?

2) Dãy số này có tuần hoàn không ? Tại sao ? (***HSG Quốc Gia 1990***).

Giải:

Vì $|x_1| < 1$ nên tồn tại $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$: $\sin\alpha = x_1$. Khi đó:

$x_2 = -\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)$

$x_3 = -\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2}|\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha)|$.

- Nếu $-\frac{\pi}{6} \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_3 = \sin\alpha$
- Nếu $-\frac{\pi}{2} < \alpha < -\frac{\pi}{6} \Rightarrow x_3 = \sin(\alpha - \frac{2\pi}{3})$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được:

$i)$ Nếu $-\frac{\pi}{6} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì: $x_n = \begin{cases} \sin\alpha & \text{khi} \quad n = 2k+1 \\ \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) & \text{khi} \quad n = 2k \end{cases}$

$ii)$ Nếu $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < -\dfrac{\pi}{6}$ thì: $x_n = \begin{cases} \sin(\alpha - \dfrac{2\pi}{3}) & \text{khi} \quad n = 2k+1 \\ \sin(\dfrac{\pi}{3} - \alpha) & \text{khi} \quad n = 2k \end{cases} \quad \forall k \geq 1.$

1) Dãy gồm toàn số dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha > 0 \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{6} \leq \alpha < \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}.$

Vậy $0 < x_1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ là điều kiện cần phải tìm.

2) Dựa vào kết quả trên ta có:

- Nếu $\sin\alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{1}{2}$. Khi đó từ (1) ta có được

$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \ldots \Rightarrow (x_n)$ là dãy tuần hoàn.

- Nếu $\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leq x_1 < 1 \\ x_1 \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$ thì dãy số có dạng $x_1, x_2, x_1, x_2, \ldots.$

- Nếu $-1 < x_1 < -\dfrac{1}{2}$ thì dãy số có dạng $x_1, x_2, x_3, x_2, x_3 \ldots.$

Ví dụ 3.10: Tính tổng $S_n = 1 + 3 + 5 + .. + 2n - 1$, với n là số tự nhiên $n \geq 1$.

Giải:

Ta có: $S_1 = 1$ và $S_n = S_{n-1} + 2n - 1$.

Mà: $2n - 1 = n^2 - (n-1)^2 \Rightarrow S_n - n^2 = S_{n-1} - (n-1)^2 = \ldots = S_1 - 1 = 0$

Vậy $S_n = n^2$.

Ví dụ 3.11: Tính tổng $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ với n là số tự nhiên $n \geq 1$.

Giải: Ta có $S_1 = 1$ và $S_n = S_{n-1} + n^2$ (23).

Ta phân tích: $n^2 = k\left[n^3 - (n-1)^3\right] + l\left[n^2 - (n-1)^2\right] + t\left[n - (n-1)\right]$

Cho $n = 0; n = 1; n = 2$, ta có hệ: $\begin{cases} k - l + t = 0 \\ k + l + t = 1 \\ 7k + 3l + t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}; l = \frac{1}{2}; t = \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow (23) \Leftrightarrow S_n - \left[\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right] = S_{n-1} - \left[\frac{1}{3}(n-1)^3 + \frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{6}(n-1)\right]$$

$$\Rightarrow S_n - \left[\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right] = S_1 - 1 = 0 \Rightarrow S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ví dụ 3.12: Tính tổng $S_n = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + n(n+1)(n+2) \quad \forall n \ge 1$.

Giải: Ta có: $S_1 = 6$ và $S_n - S_{n-1} = n(n+1)(n+2) \quad \forall n \ge 2$.

Do $n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}\left[(n+1)^4 - n^4\right] + \frac{1}{2}\left[(n+1)^3 - n^3\right] -$

$$-\frac{1}{4}\left[(n+1)^2 - n^2\right] - \frac{1}{2}\left[(n+1) - n\right].$$

Đặt $f(n) = \frac{1}{4}(n+1)^4 + \frac{1}{2}(n+1)^3 - \frac{1}{4}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1)$

$$\Rightarrow S_n - f(n) = S_{n-1} - f(n-1) = ... = S_1 - f(1) = 0$$

$$\Rightarrow S_n = f(n) = \frac{n(n+1)(n+1)(n+3)}{4}.$$

Ví dụ 3.13: Trong mp cho n đường thẳng, trong đó không có ba đường nào đồng quy và đôi một không cắt nhau. Hỏi n đường thẳng trên chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền ?

Giải: Gọi a_n là số miền do n đường thẳng trên tạo thành. Ta có: $a_1 = 2$.
Ta xét đường thẳng thứ $n+1$ (ta gọi là d), khi đó d cắt n đường thẳng đã cho tại n điểm và bị n đường thẳng chia thành $n+1$ phần, đồng thời mỗi phần thuộc một miền của a_n. Mặt khác với mỗi đoạn nằm trong miền của a_n sẽ chia miền đó thành 2 miền, nên số miền có thêm là $n+1$. Do vậy, ta có: $a_{n+1} = a_n + n + 1$

Từ đây ta có: $a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$.

Chú ý :
Với giả thiết ở trong ví dụ trên nếu thay yêu cầu tính số miền bằng tính số đa giác tạo thành thì ta tìm được: $a_n = \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$.

Ví dụ 3.14: Trong không gian cho n mặt phẳng, trong đó ba mặt phẳng nào cũng cắt nhau và không có bốn mặt phẳng nào cùng đi qua qua một điểm. Hỏi n mặt phẳng trên chia không gian thành bao nhiêu miền ?

Giải:
Gọi b_n là số miền do n mặt phẳng trên tạo thành
Xét mặt phẳng thứ $n+1$ (ta gọi là (P)). Khi đó (P) chia n mặt phẳng ban đầu theo n giao tuyến và n giao tuyến này sẽ chia (P) thành $1+\dfrac{n(n+1)}{2}$ miền, mỗi miền này nằm trong một miền của b_n và chia miền đó làm hai phần.Vậy $b_{n+1} = b_n + \dfrac{n^2+n+2}{2}$.
Từ đó, ta có: $b_n = \dfrac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$.

Ví dụ 3.15: Trong một cuộc thi đấu thể thao có m huy chương, được phát trong n ngày thi đấu. Ngày thứ nhất, người ta phát một huy chương và $\dfrac{1}{7}$ số huy chương còn lại. Ngày thứ hai, người ta phát hai huy chương và $\dfrac{1}{7}$ số huy chương còn lại. Những ngày còn lại được tiếp tục và tương tự như vậy. Ngày sau cùng còn lại n huy chương để phát . Hỏi có tất cả bao nhiêu huy chương và đã phát trong bao nhiêu ngày? (***IMO 1967***).

Giải: Gọi a_k là số huy chương còn lại trước ngày thứ $k \Rightarrow a_1 = m$, khi đó ta có:

$$a_{k+1} = \frac{6}{7}a_k - \frac{6k}{7} \Rightarrow a_k = \left(\frac{6}{7}\right)^{k-1}(m-36) - 6k + 42$$

$$\Rightarrow a_n = n = \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}(m-36) - 6n + 42 \Rightarrow m - 36 = 7(n-6)\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}$$

Vì $(6,7) = 1$ và $6^{n-1} > n-6$ nên ta có $n-6=0 \Leftrightarrow n=6 \Rightarrow m=36$.
Vậy có 36 huy chương được phát và phát trong 6 ngày.

Ví dụ 3.16: Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài n trong đó không có hai bit 1 đứng cạnh nhau?

Giải: Gọi c_n là số xâu nhị phân độ dài n thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Ta có $c_1 = 2$; $c_2 = 3$.

Xét xâu nhị phân độ dài n thỏa mãn điều kiện đầu bài có dạng $a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots\ldots a_2 a_1$.

Có hai trường hợp

- $a_n = 1$. Khi đó $a_{n-1} = 0$ và $a_{n-2} \ldots\ldots a_2 a_1$ có thể chọn là một xâu bất kỳ độ dài $n-2$ thỏa điều kiện. Có c_{n-2} xâu như vậy, suy ra trường hợp này có c_{n-2} xâu.
- $a_n = 0$. Khi đó $a_{n-1} \ldots\ldots a_2 a_1$ có thể chọn là một xâu bất kỳ độ dài $n-1$ thỏa điều kiện. Có c_{n-1} xâu như vậy, suy ra trường hợp này có c_{n-1} xâu.

Vậy tổng cộng xây dựng được $c_{n-1} + c_{n-2}$ xâu, hay $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$.

$$\Rightarrow c_n = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Ví dụ 3.17: Cho số nguyên dương n. Tìm tất cả các tập con A của tập $X = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ sao cho không tồn tại hai phần tử $x, y \in A$ thỏa mãn: $x + y = 2n + 1$ (***Thụy Sỹ 2006***).

Giải:

Để giải bài toán này ta sẽ đi đếm số tập con A của X thỏa mãn luôn tôn tại hai phần tử $x, y \in A$ sao cho $x + y = 2n + 1$ (ta gọi tập A có tính chất T).

Gọi a_n là số tập con A của tập $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ có tính chất T

Khi đó các tập con $A \subset \{1, 2, \ldots, 2n, 2n+1, 2n+2\}$ xảy ra hai trường hợp.

TH1: Trong tập A chứa hai phần tử 1 và $2n+2$, trong trường hợp này số tập A có tính chất T chình bằng số tập con của tập gồm $2n$ phần tử $\{2, 3, 4, \ldots, 2n, 2n+1\}$ và số tập con của tập này bằng 2^{2n}.

TH2: Trong tập A không chứa đầy đủ hai phần tử 1 và $2n+2$. Khi đó A phải chứa một tập A' là tập con của tập $\{2, 3, 4, \ldots, 2n, 2n+1\}$ sao cho có hai phần tử $x', y' \in A'$: $x' + y' = 2n + 3$. Ta thấy số tập con A' như trên chính bằng số tập con của tập $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ có tính chất T (Vì ta trừ các phần tử của $\{2, 3, 4, \ldots, 2n, 2n+1\}$ đi một đơn vị ta được tập $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ và $x', y' \in A' : x' + y' = 2n + 1$)

Hơn nữa với mỗi tập A' ta có được ba tập A (bằng cách ta chọn A là A' hoặc $\{1\} \cup A'$ hoặc $\{2n+2\} \cup A'$)

Do vậy: $a_{n+1} = 3a_n + 2^{2n} \Rightarrow a_n = 4^n - 3^n$

Vậy số tập con thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $4^n - a_n = 3^n$.

Bài tập áp dụng

Bài 1: Tìm CTTQ của các dãy số sau

1) $u_1 = 1;\ u_2 = 0,\ \ u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = n + 1,\ n \geq 2$

2) $u_1 = 0;\ u_2 = 0,\ \ u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 3.2^n,\ \ n \geq 2$

3) $u_1 = 0;\ u_2 = 0,\ \ u_{n+1} - 2u_n - 3u_{n-1} = n + 2^n,\ \ n \geq 2$

4) $u_1 = 0,\ u_2 = 1, u_3 = 3,\ u_n = 7u_{n-1} - 11.u_{n-2} + 5.u_{n-3},\ n \geq 4$

5) $\begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} + 2 - \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3} - 2)u_{n-1}} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$.

Bài 2: Cho dãy số $\{b_n\}$ xác định bởi : $\begin{cases} b_n = 2.b_{n-1} + b_{n-2} \\ b_1 = 1,\ b_2 = 2 \end{cases} \quad n \in N \quad (n \geq 3)$

Chứng minh rằng $b_n \leq \left(\dfrac{5}{2}\right)^n,\ \ \forall n \in N$

Bài 3: Cho dãy số $\{u_n\}$ thoả mãn như sau : $\begin{cases} u_n \in Z^+, \forall \in N \\ u_0 = 1, u_1 = 9 \\ u_n = 10.u_{n-1} - u_{n-2} \quad \forall n \in N,\ n \geq 2 \end{cases}$

Chứng minh : $\forall k \in N, k \geq 1.$

1) $u_k^2 + u_{k-1}^2 - 10u_k.u_{k-1} = -8$

2) $5.u_k - u_{k-1} \vdots 4$ và $3.u_k^2 - 1 \vdots 2$

Bài 4: Cho dãy số x_n xác định như sau: $\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 0 \\ x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} = 2 \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$.

Xác định số tự nhiên n sao cho : $x_{n+1} + x_n = 22685$.

Bài 5: Cho dãy (x_n) được xác định bởi $\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 5 \\ x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$.

Tìm $\lim x_n \left\{ \sqrt{2} x_n \right\}$ (***TH&TT T7/253***).

Bài 6: Xét dãy $(a_n): a_1 = \dfrac{1}{2}$ và $a_{n+1} = \left(\dfrac{1 - (1 - a_n^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall n \geq 1$.

Chứng minh rằng: $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2005} < 1,03$ (***TH&TT T10/335***).

Bài 7: Cho dãy $(a_n): a_0 = 2; a_{n+1} = 4a_n + \sqrt{15a_n^2 - 60} \ \forall n \geq 1$. Hãy xác định CTTQ của a_n và chứng minh rằng số $\dfrac{1}{5}(a_{2n} + 8)$ có thể biểu diễn thành tổng bình phương của ba số nguyên liên tiếp với $\forall n \geq 1$ (***TH&TT T6/262***).

Bài 8: Cho dãy số $\{p(n)\}$ được xác định như sau: $p(1) = 1$;

$p(n) = p(1) + 2p(2) + \ldots + (n-1)p(n-1) \ \forall n \geq 2$. Xác định $p(n)$ (***TH&TT T7/244***).

Bài 9: Xét dãy $(u_n): \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 3u_{n-1} + 2n^3 - 9n^2 + 9n - 3 \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p thì $2000 \sum_{i=1}^{p-1} u_i$ chia hết cho p (***TH&TT T6/286***).

Bài 10: Dãy số thực $(x_n): \begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = 2x_n^2 - 1 \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$.

Tìm tất cả các giá trị của a để $x_n < 0 \ \forall n \geq 0$ (***TH&TT T10/313***).

Bài 11: Dãy số $(x_n): x_0 = 1, x_1 = \dfrac{1}{2}$ và $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}.x_n}{2002x_{n+1} + 2001x_n + 2000x_{n+1}x_n}$

$\forall n \geq 0$. Hãy tìm CTTQ của x_n (***TH&TT T8/298***).

Bài 12: Cho dãy số (a_n) được xác định như sau: $(a_n): \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2na_{n-1} + 1} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$.

Tính tổng $a_1 + a_2 + \ldots + a_{1998}$.

Bài 13: Cho dãy số (a_n) được xác định bởi :

$$a_1 = 1.2.3,\ a_2 = 2.3.4,\ \dots,\ a_n = n(n+1)(n+2).$$

Đặt $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng $4S_n + 1$ là số chính phương .
(***HSG Quốc Gia – 1991 Bảng B***)

Bài 14: Cho hai dãy số $(a_n),(b_n)$ được xác định như sau: $a_0 = 2; b_0 = 1$ và

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n},\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n} \quad \forall n \ge 0.$$

Chứng minh rằng các dãy (a_n) và (b_n) có cùng một giới hạn chung khi $n \to +\infty$.
Tìm giới hạn chung đó. (***HSG Quốc Gia – 1993 Bảng A ngày thứ 2***)

Bai 15: Cho các số nguyên a,b. Xét dãy số nguyên (a_n) được xác định như sau

$a_0 = a; a_1 = b; a_2 = 2b - a + 2;\ a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n \ \forall n \ge 0$

$a)$ Tìm CTTQ của dãy (a_n).

$b)$ Tìm các số nguyên a,b để a_n là số chính phương với $\forall n \ge 1998$.

(***HSG Quốc Gia – 1998 Bảng B***).

Bài 16: Cho dãy số $(a_n) : \begin{cases} a_0 = 3 \\ (3 - a_n)(6 + a_{n-1}) = 18 \quad \forall n \ge 1 \end{cases}$. Tính $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$

(***Trung Quốc – 2004***).

Bài 17: Cho dãy số $(a_n) : \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \dfrac{7a_{n-1} + \sqrt{45a_{n-1}^2 - 36}}{2} \quad \forall n \ge 1 \end{cases}$. Chứng minh

1) a_n là số nguyên dương với $\forall n \ge 0$.

2) $a_{n+1}a_n - 1$ là số chính phương $\forall n \ge 0$. (***Trung Quốc – 2005***).

Bài 18: Cho dãy số $(u_n) : \begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} \quad \forall n \ge 3 \end{cases}$. Chứng minh rằng $\frac{u_n^2 - 1}{3}$ là số chính phương (***Chọn đội tuyển Nghệ an – 2007***).

Bài 19: Cho dãy số $(b_n) : \begin{cases} b_0 = 12; b_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ b_n + b_{n-1} = b_{n-2}.\sqrt{3} \quad \forall n \ge 2 \end{cases}$. Tính $\sum_{i=0}^{2007} b_i$ (***Moldova 2007***).

Bài 20: Có n tấm thẻ được đánh số từ 1 đến n. Có bao nhiêu cách chọn ra một số thẻ (ít nhất 1 tấm) sao cho tất cả các số viết trên các tấm thẻ này đều lớn hơn hoặc bằng số tấm thẻ được chọn.

Bài 21: Cho dãy (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1;\ u_n > 0\ \forall n \ge 1 \\ u_n = \dfrac{\sqrt{1+u_{n-1}^2}-1}{u_{n-1}} \quad \forall n \ge 2 \end{cases}$. Chứng minh rằng $u_1 + u_2 + ... + u_n \ge 1 + \dfrac{\pi}{4}\left[1 - (\dfrac{1}{2})^{n-1}\right]$ (***HSG Quảng Bình 2008 – 2009***).

Bài 22: Cho dãy đa thức : $P(x) = x^3 - 6x + 9$ và $P_n(x) = P(P(...(P(x))))$ n lần. Tìm số nghiệm cảu $P(x)$ và $P_n(x)$? (***Dự tuyển Olympic***).

Bài 23: Xác định hệ số x^2 trong khai triển chính quy của đa thức
$Q_k(x) = (...(((x-2)^2-2)^2-2)^2-...)^2-2)^2$ (có k dấu ngoặc).

Bài 24: Cho dãy $x_n : x_0 = 1, x_1 = 1, x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$ $\forall n \ge 1$ và dãy số $\left(y_n\right) : y_0 = 1, y_1 = 2, y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$ $\forall n \ge 1$. Chứng minh rằng:

$$y_n^2 = 3x_n^2 + 1 \quad \forall n \ge 0$$ (***Canada – 1998***).

Bài 25: Có bao nhiêu tam giác có độ dài các cạnh là các số tự nhiên không vượt quá $2n$ (***Macedonian – 1997***).

Bài 26: Cho dãy số (u_n)được xác định như sau: $u_0 = u_1 = 1$ và $u_{n+1} = 14u_n - u_{n-1}$ với $\forall n \ge 1$. Chứng minh rằng với $\forall n \ge 0$ thì $2a_n - 1$ là một số chính phương (***Chọn đội tuyển Romania 2002***).

KẾT LUẬN – KIẾN NGHỊ

Trải qua thực tiễn giảng dạy, nội dung liên quan đến chuyên đề với sự góp ý của đồng nghiệp vận dụng chuyên đề vào giảng dạy đã thu được một số kết quả sau

1) Học sinh trung bình trở lên có thể vận dụng một số kết quả cơ bản trong chuyên đề vào giải bài toán xác định CTTQ của một số dạng dãy số có dạng truy hồi đặc biệt.

2) Học sinh giỏi có thể vận dụng các kết quả trong chuyên đề để tham khảo phục vụ trong những kì thi học sinh giỏi cấp Tỉnh và cấp Quốc Gia.

3) Tạo được sự hứng thú cho học sinh khi học về bài toán dãy số.

4) Là tài liệu tham khảo cho học sinh và giáo viên.

5) Qua đề tài giáo viên có thể xây dựng các bài toán về dãy số.

Bên cạnh những kết quả thu được, chuyên đề còn một số hạn chế sau:

1) Trong chuyên đề chưa xây dựng được phương pháp xác định CTTQ của một số dãy số mà các hệ số trong công thức truy hồi biến thiên.

2) Chưa đưa vào một số phương pháp xác định CTTQ của dãy số dựa vào một số kiến thức liên quan đến Toán cao cấp như phương pháp hàm sinh...

Hy vọng các đồng nghiệp sẽ phát triển, mở rộng và khắc phục một số hạn chế nói trên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đại Số và Giải Tích lớp 11 Nâng Cao

[2] Các bài thi Olympic Toán THPT Việt Nam, Tủ sách TH&TT – NXB GD 2007

[3] Một số bài toán chọn lọc về dãy số , Nguyễn Văn Mậu, NXBGD – 2003

[4] Các phương pháp đếm nâng cao, Trần Nam Dũng

[5] Tạp chí Toán Học Và Tuổi Trẻ

[6] Các diễn đàn Toán học như: maths.vn ; diendantoanhoc.net ; mathscop.org …

[7] Tuyển tập các chuyên đề thi Olympic 30 – 4 Khối 11

[8] Phép quy nạp trong hình học, Yaglom – L.I.Golovina – IM (Khổng Xuân Hiển dịch xuất bản năm 1987)